

**Вступительные испытания для поступающих в 9 класс
на направления «Физико-математическое», «Математика и информатика»
или «Экономика и математика»
Предмет по выбору
Математика (углублённый уровень), очный этап**

**Школа «Летово»
Декабрь 2017**

Буклет с заданиями

На выполнение работы отводится 3 часа (180 минут). К каждой задаче требуется написать **развёрнутое решение**. Записывайте решение каждой задачи на отдельном бланке.

Во время работы не разрешено пользоваться вычислительной техникой (калькуляторы, мобильные телефоны, Apple Watch и т.д.), учебной и справочной литературой.

Баллы, полученные за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов. Для экономии времени пропускайте задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходите к следующему. К пропущенным заданиям можно вернуться позже.

Желаем успеха!



- 1) В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ $AB = BC$ и $AD = DC$.
- Сформулируйте и докажите свойства диагоналей четырёхугольника $ABCD$.
 - Существует ли точка, равноудаленная от всех сторон этого четырёхугольника?
- 2) а) Приведите пример трёх различных натуральных чисел, сумма квадратов двух из которых равна квадрату третьего.
б) Представьте 1 в виде суммы квадратов двух различных положительных рациональных чисел.
в) Представьте 1 в виде суммы квадратов четырёх различных положительных рациональных чисел.
- 3) Найдите значение выражения $\frac{a^8-1}{a^6-a^4+a^2-1}$, если $a = \sqrt{1025} \cdot \sqrt{1023}$. Ответ запишите в виде степени простого числа.
- 4) Ближайший к дому Ивана Петровича продуктовый магазин называется «В десяти шагах от дома». Выйдя из магазина с покупками, Иван Петрович пошёл домой. В это же время Пётр Иванович, его сосед по лестничной клетке, вышел из дома за продуктами и отправился в тот же самый магазин, из которого шёл Иван Петрович. Соседи встретились в 400 м от дома. Дойдя до дома, Иван Петрович вспомнил, что забыл купить хлеб. Решив не тратить время, он не стал подниматься в квартиру и снова отправился в магазин. А Пётр Иванович, дойдя до магазина, осознал, что забыл дома кошелек с деньгами, и тут же повернул назад. Соседи вновь встретились в 500 м от магазина. Предложите альтернативный вариант названия магазина, изменив в нём всего одно слово, чтобы с точки зрения Ивана Петровича и Петра Ивановича дорога до магазина соответствовала его названию, если известно, что скорости обоих соседей постоянны. Обоснуйте свой ответ.
- 5) Функция $\max(a, b)$ находит максимум из двух чисел.
Например, $\max(5, 7) = 7$, $\max(2, 2) = 2$.
Постройте график функции $y = \max\left(-1, \max\left(x, \frac{4}{x}\right)\right)$, $x \neq 0$. Обоснуйте своё решение.
- 6) Обитатели посёлка, в котором 32 дома, держат различных животных. Всего в посёлке живет 25 кошек, 19 собак и 10 коз. В домах, где есть домашние животные, есть один, два или три ребёнка. Ни в одном доме не живёт больше двух животных, и ни в каком доме нет двух одинаковых животных. В пяти домах не живёт детей вообще. В скольких домах живут и собака, и коза?
- 7) Решите систему уравнений:
- $$\begin{cases} x^4 + y^4 = 1 \\ x^5 + y^5 = 1 \end{cases}$$
- 8) В трапеции $ABCD$ с меньшим основанием CD провели высоту CH . При этом AH оказалось равно средней линии трапеции.
- Докажите, что трапеция $ABCD$ – равнобокая (равнобедренная).
 - Пусть в этой трапеции $AB = b$, $AH = c$ и диагональ BD лежит на биссектрисе угла ABC . Можно ли найти AD ?



- 9) Учитель написал на доске большое число и попросил учеников назвать его делители. «Число делится на 2», – сказал первый ученик. «Число делится на 3», – сказал второй ученик. И так продолжалось до тридцатого ученика, который сказал: «Число делится на 31». После этого учитель сообщил, что ровно два ученика ошиблись, и они отвечали один сразу после другого. Какие два ученика дали неверные ответы?
- 10) У Весёлого молочника имеется две 10-литровые пластиковые бутылки, полные молока, а также две пустые пластиковые бутылки объёмом 3 и 5 литров. К нему пришли два покупателя без тары, каждый из которых хотел бы купить 2 литра молока. Каким образом молочнику продать им молоко? Других ёмкостей у него нет, возможности каким-то образом делать отметки на бутылках тоже нет, потерять какое-то количество молока при продаже он тоже не хочет.

