Решения

Задача 18.1. Если число делится на 90, то оно должно делиться на 9 и на 10. Поскольку число делится на 10, то его последняя цифра равна 0. А из делимости на 9 следует, что сумма цифр должна делиться на 9. Отсюда находим, что число равно 7740.

Задача 18.2. **а)** 17 горизонтальных прямых делят плоскость на 18 частей. 24 вертикальных прямых делят плоскость на 25 частей. 17 горизонтальных и 24 вертикальных прямых делят плоскость на $18 \cdot 25 = 450$ частей.

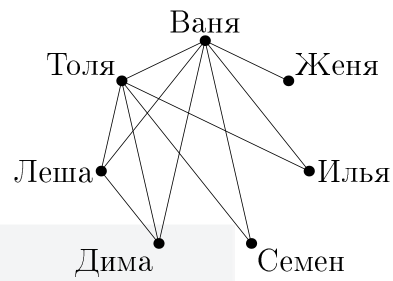
б) Если на глобусе провести всего одну параллель, то она разделит глобус на две части. Каждая следующая проводимая параллель будет делить одну часть на две, увеличивая количество частей на один. Тем самым количество параллелей всегда будет на один меньше количества частей, 17 параллелей разделят глобус на 18 частей. Если провести на глобусе только два меридиана, то они разделят глобус на две части. Каждый следующий меридиан будет делить одну из частей на две, увеличивая количество частей на один. Поэтому количество частей будет равняться количеству проведенных меридианов, 24 меридиана делят глобус на 24 части. А 17 параллелей и 24 меридиана делят глобус на $18 \cdot 24 = 432$ части.

Задача 18.3. Самая умная девушка всегда говорит правду, а потому не может сказать, что обе подруги умнее ее. Поэтому самой умной может быть только Аня. Тогда Аня говорит правду и могла сказать только: «Маша умнее Светы». Получается, Света также сказала правду, а Маша соврала. Тогда самой высокой может быть только Света, а Маша — самая красивая.

Задача 18.4. Заметим, что Олень при перемещении по шахматной доске будет ходить все время по полям одного цвета. Но правая верхняя и правая нижняя клетки шахматной доски имеют разные цвета. Поэтому Олень не может оказаться в правом верхнем углу.

Задача 18.5. Поскольку Ваня сыграл шесть партий, то он сыграл партии со всеми остальными. Тогда Женя играл только с Ваней. Значит, Толя играл со всеми, кроме Вани. Тогда Семен и Илья сыграли свои партии с Ваней и Толей. Остаются Леша и Дима. Каждый из них сыграл по одной партии с Ваней и с Толей. А третью партию они могли сыграть только между собой. Получаем, что Леша сыграл с Ваней, Толей и Димой.

Для решения этой задачи удобно нарисовать граф, вершинами которого будут школьники, после чего последовательно соединять сыгравших друг с другом школьников ребром. Визуальное представление облегчит поиск решения задачи. Получившийся в итоге граф изображен на рисунке.



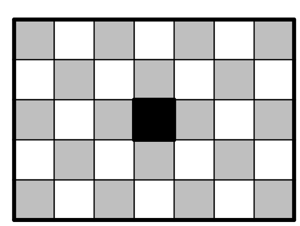
Задача 18.6. За участие в матче будем выдавать каждой команде кубок. В этом случае каждая команда получит по 6 кубков, а всего будет роздано $12 \cdot 6 = 72$ кубка. Поскольку в каждом матче мы выдаем два кубка двум играющим командам, то количество розданных кубков будет вдвое больше числа сыгранных матчей. Всего было сыграно $72 : 2 = 36$ матчей.

Задачу можно перевести на язык графов. Пусть команды будут вершинами графа. Вершины будем соединять ребром, если соответствующие команды сыграли друг с другом матч. Тогда в графе будет 12 вершин, каждая будет иметь степень 6. Тогда сумма степеней всех вершин равна 72, а количество ребер-матчей в два раза меньше и равно 36.

Задача 18.7. Из равенства $A \cdot C = C$ следует, что либо $C = 0$, либо $A = 1$. Если $C = 0$, то произведение $A \cdot B \cdot B$ равняется $A \cdot 10$, откуда (поскольку A не может равняться 0) $B \cdot B = 10$, что невозможно. Если же $A = 1$, то произведение цифр числа ABB равно $B \cdot B$ и начинается на 1. Это возможно только при $B = 4$, а исходное число равно 144.

Задача 18.8. Поскольку каждый лист — это две страницы, то из книги выпало четное число страниц. Тогда номер первой страницы после выпавшего куска должен быть обязательно нечетным. Это может быть либо страница 283, либо страница 823. Тогда из книги могло выпасть либо $283 - 238 - 1 = 44$ страницы, либо $823 - 238 - 1 = 584$ страницы. Значит, из книги могло выпасть 22 или 292 листа.

Задача 18.9. Раскрасим комнаты замка в шахматном порядке в белый и черный цвет. При перемещении по замку цвета посещаемых комнат будут чередоваться. Если удалось обойти все комнаты, побывав в каждой ровно один раз, то количество комнат черного и белого цвета должно быль либо одинаковым, либо отличаться на 1. Но комнат белого цвета 16, а комнат черного цвета 18. Поэтому обойти все комнаты требуемым образом не получится.



Задача 18.10. Перепишем ребус в виде $Я + 8 \cdot ОН = МЫ$. Видим, что $8 \cdot ОН$ — число двузначное, поэтому ОН не превосходит 12. Поскольку цифры числа ОН различны, то либо $ОН = 10$, либо $ОН = 12$. В первом случае $8 \cdot ОН = 80$, а тогда $Я + 8 \cdot ОН$ оканчивается на цифру Я и не может равняться МЫ.

Во втором случае $8 \cdot ОН = 96$. Наибольшее значение, которое может принимать МЫ, равно 98, поскольку цифры этого числа различны. Тогда Я не может быть больше 2. Но цифры 1 и 2 заменены буквами О и Н, поэтому Я может равняться только 0. В результате получаем следующее решение ребуса: $0 + 8 \cdot 12 = 96$.