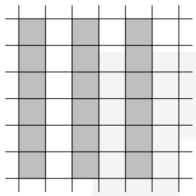
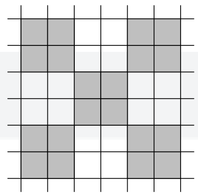
Раскраска в два цвета

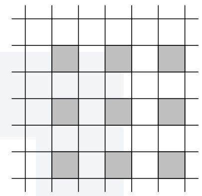
При решении задач помимо знакомой нам шахматной раскраски используются и другие виды раскраски в два цвета. Наиболее «популярными» из них являются раскраски «зеброй», «крупными квадратами» и «в горошек», которые изображены на рисунке.



«Зеброй»



«Крупными квадратами»



«В горошек»

Разберем на примере способ их применения.

Пример 22.1. Какое наибольшее количество прямоугольников 1×4 можно вырезать из прямоугольника 6×10 (не нарушая границ клеток)?

Попытки разрезать прямоугольник целиком не приводят к успеху: все время остается 4 клетки. Поэтому возникает предположение, что больше 14 прямоугольников вырезать не получится. Теперь необходимо это доказать. Шахматная раскраска клеток большого прямоугольника не помогает: получается 30 черных и 30 белых клеток, любой прямоугольник 1×4 содержит 2 белых и 2 черных клетки, что не дает возможности объяснить, почему больше 14 прямоугольников получить не удается. Поэтому попробуем использовать другую раскраску.

Раскрасим большой прямоугольник «крупными квадратами». При такой раскраске мы получим 28 клеток одного цвета и 32 клетки другого цвета. При любом способе вырезания прямоугольника 1×4 в нем будет содержаться по две клетки каждого цвета. Поэтому больше 14 прямоугольников вырезать не получится. При этом несложно показать, что 14 прямоугольников можно вырезать. Можно, например, разрезать прямоугольник на части 4×10 и 2×10. Первую часть можно разрезать на 10 прямоугольников 1×4, а из второго прямоугольника вырезать еще 4 прямоугольника.

Доказать оценку можно было и с помощью раскраски «в горошек». В этом случае каждый вырезаемый прямоугольник 1×4 будет содержать либо 0, либо 2 закрашенные клетки. Но общее количество закрашенных клеток нечетно и равно 15, а потому хотя бы одна закрашенная клетка не попадет в вырезаемый прямоугольник. Это означает, что разрезать большой прямоугольник на маленькие без остатка (их тогда было бы 15) не получится, а потому можно вырезать не более 14 прямоугольников.

Также отметим, что можно было воспользоваться диагональной раскраской в четыре цвета (про раскраску в несколько цветов мы уже говорили ранее). При такой раскраске клеток одного из цветов в большом прямоугольнике было бы 14, а каждый маленький прямоугольник должен был содержать по одной клетке каждого цвета. Поэтому больше 14 прямоугольников точно не получилось бы вырезать.

Понятно, что выбор той или иной раскраски зависит от условия задачи. Скажем, при решении задач на разрезания стоит подбирать такую раскраску, при которой вырезаемые фигуры будут содержать одинаковое количество закрашенных клеток или это количество будет все время одной и той же четности. Так, в разобранном выше примере прямоугольник 1×4 при раскраске «крупными квадратами» содержит 2 закрашенных клетки, а при раскраске «в горошек» — четное количество закрашенных клеток. Если есть ощущение, что в задаче может помочь раскраска, то перебор вариантов стоит начинать с наиболее распространенных и известных вариантов раскраски. Однако нередко встречаются и такие задачи, в которых необходимо придумать какую-нибудь новую раскраску специально для данной задачи. Пара подобных задач есть и в этом занятии.

Задачи

Задача 22.1. В левый нижний угол шахматной доски 8×8 поставлено в форме квадрата 3×3 девять фишек. Фишка может прыгать на свободное поле через рядом стоящую фишку, т. е. симметрично отражаться относительно её центра (прыгать можно по вертикали, горизонтали и диагонали). Можно ли за некоторое количество таких ходов поставить все фишки вновь в форме квадрата 3×3, но в другом углу: **а)** левом верхнем; **б)** правом верхнем?

Задача 22.2. На каждой клетке доски размером 9×9 сидит жук. По свистку каждый из жуков переползает в одну из соседних по диагонали клеток. При этом в некоторых клетках может оказаться больше одного жука, а некоторые клетки окажутся незанятыми. Докажите, что при этом незанятых клеток будет не меньше 9.

Задача 22.3. Дан куб $6 \times 6 \times 6$. Докажите, что его нельзя разбить на параллелепипеды $4 \times 1 \times 1$.

Задача 22.4. Докажите, что числа от 40 до 99 нельзя разбить на группы по 4 числа так, чтобы числа каждой группы в одном разряде совпадали, а цифры другого разряда шли бы подряд (например «54, 55, 56, 57»; «44, 54, 64, 74»)

Задача 22.5. Из шахматной доски 8×8 вырезали центральный квадрат 2×2. Можно ли оставшуюся часть разрезать на фигурки в форме буквы «Г» из четырех клеток?

Задача 22.6. Можно ли шахматную доску разрезать на 15 вертикальных и 17 горизонтальных плиток 1×2?

Задача 22.7. **а)** Дно прямоугольной коробки было выложено плитками размерами 2×2 и 1×4. Плитки высыпали из коробки и при этом потеряли одну плитку 2×2. Вместо неё удалось достать плитку 1×4. Докажите, что теперь выложить дно коробки плитками не удастся. **б)** Останется ли верным утверждение задачи, если вместо плиток 1×4 и 2×2 рассматривать плитки из трех квадратиков: прямоугольные 1×3 и «уголки»?

Задача 22.8. Можно ли прямоугольник 5×7 покрыть уголками из трех клеток, не выходящими за его пределы, в несколько слоев так, чтобы каждая клетка прямоугольника была покрыта одинаковым числом клеток, принадлежащих уголкам?

Задача 22.9. Из листа клетчатой бумаги размером 11×11 клеток вырезали по клеткам 15 квадратиков размером 2×2 клетки. Докажите, что можно вырезать ещё один такой квадратик.

Задача 22.10. Дан куб со стороной 4. Можно ли целиком оклеить 3 его грани, имеющие общую вершину, шестнадцатью бумажными прямоугольными полосками размером 1×3?