

Решения

Задача 17.1. Положим на одну чашу весов гирию, а на другую насыпем песок так, чтобы весы находились в равновесии. Уберем гирию. Чтобы теперь снова уравновесить весы, на чашу весов, где была гирия, нужно насыпать в точности килограмм песка.

Задача 17.2. Раскроем среднее звено и положим на чаши весов два получившихся куска цепи из 31 звена каждое. Если чаши весов в равновесии, то фальшивым является разомкнутое звено. Если же чаши не в равновесии, то необходимо найти фальшивое звено у более легкой части цепочки за четыре взвешивания. Продолжаем повторять операцию: размыкаем среднее звено более легкой цепочки и кладем на чаши две получившиеся части. Если в какой-то момент весы покажут равенство, то фальшивым будет последнее разомкнутое звено. Если же каждый раз весы будут показывать неравенство, то мы будем последовательно взвешивать на весах куски из 15, 7, 3 и 1 звена. В последнем, пятом взвешивании более легкое звено, лежащее на весах, и будет фальшивым.

Задача 17.3. Приведем алгоритм, работающий во всех трех пунктах. Возьмем две кучки по 40 монет и положим на весы. Если одна из кучек оказалась тяжелее, то фальшивая монета находится на весах. Возьмем более тяжелую кучку, разделим пополам и сравним эти половины на весах. Если весы во втором взвешивании показывают равновесие, то фальшивая монета при первом взвешивании была в первой кучке на весах и она легче настоящей. Если же во втором взвешивании равновесия не будет, то фальшивая монета тяжелее настоящей.

Теперь рассмотрим случай, когда в первом взвешивании весы оказались в равновесии. В этом случае находящиеся на весах 80 монет — настоящие, а фальшивая монета находится в третьей кучке. Положим на одну чашу все монеты из третьей кучки, а на другую — такое же количество настоящих монет. Если третья кучка окажется легче, то и фальшивая монета легче, а если тяжелее, то тяжелее.

Задача 17.4. Возьмем все монеты, кроме интересующей нас, и положим по 10 штук на чаши весов. На сколько при этом на одной чаше будет больше фальшивых монет, чем на другой, на столько эта чаша будет легче. Если монета, не участвующая во взвешивании, фальшивая, то на весах будет находиться 10 настоящих и 10 фальшивых монет. Четность числа фальшивых монет на двух чашах будет одинакова, поэтому весы будут показывать четную разность в граммах. Если же монета, не участвующая во взвешивании, настоящая, то на весах будет находиться 11 фальшивых монет: на какой-то чаше будет обязательно четное, а на какой-то нечетное количество фальшивых монет. Поэтому разность масс монет на чашах в этом случае будет нечетной. Поэтому по четности показаний весов мы определяем, является выбранная монета фальшивой или настоящей.

Задача 17.5. Пронумеруем монеты. Положим на первую чашу весов монеты 1, 2, 3, 4, а на другую — 5, 6, 7, 8. Если весы в равновесии, то фальшивая монета — одна из оставшихся. Возьмем три из них, например, 9, 10, 11, и взвесим с тремя настоящими. В случае равновесия весов фальшивой будет монета 12, и третьим взвешиванием определяем, легче она или тяжелее настоящей. Если же во втором взвешивании равновесия не было, то одна из монет 9, 10, 11 — фальшивая, а результат второго взвешивания позволяет понять, легче или тяжелее настоящей фальшивая монета. Зная это, несложно найти фальшивую монету среди трех, для этого достаточно сравнить друг с другом две из них на весах.

Теперь рассмотрим случай, когда в первом взвешивании одна из чаш оказалась легче. Пусть это была чаша с монетами 1, 2, 3, 4, поскольку другой случай будет полностью аналогичным. Это означает, что либо фальшивой будет одна из монет 1, 2, 3, 4 и она легче настоящих, либо какая-то из монет 5, 6, 7, 8 и она тяжелее настоящих. Всего 8 возможных вариантов. Теперь подберем такое взвешивание, чтобы при любом его результате (правая чаша легче, правая чаша тяжелее или весы в равновесии) оставалось не более трех вариантов. Например, положим на первую чашу монеты 1, 2, 5, а на вторую — 3, 4, 6.

Если чаши в равновесии, то все монеты на весах настоящие. Значит фальшивой является монета с номером 7 или 8, и она точно более тяжелая. Третьим взвешиванием сравним эти две монеты, более тяжелая и будет искомой.

Если легче оказалась чаша с монетами 1, 2, 5, то фальшивой может быть монета с номером 1 или 2 и она более легкая, либо монета с номером 6 и она более тяжелая. Третьим взвешиванием сравниваем на весах монеты 1 и 2. В случае равенства фальшивой является монета 6. В противном случае — та монета, которая находится на более легкой чаше.

Случай, когда во втором взвешивании легче оказалась чаша с монетами 3, 4, 6 разбирается аналогично.

Задача 17.6. Положим на весы две кучки по 3 монеты. Если весы показывают равновесие, то на самом деле равновесия нет, а потому фальшивая монета на весах, а не участвовавшие во взвешивании три монеты точно настоящие. Если же одна из кучек оказалась легче, то легкая чаша точно не является легкой, фальшивой монеты в этой кучке быть не может. В результате первого взвешивания мы выявили три настоящих монеты.

После первого взвешивания остается 6 монет, среди которых одна фальшивая. Положим по две монеты на весы. Как и в первом взвешивании, если весы показывают равенство, то не участвующие во взвешивании две монеты — настоящие. Если же равновесия нет, то на более легкой чаше обе монеты настоящие.

После второго взвешивания имеем 5 настоящих монет, а фальшивая монета — одна из четырех оставшихся. Положим на весы по одной монете. Если весы в равновесии, то остальные две монеты — настоящие, семь настоящих монет найдено. Если же одна из чаш легче, то на ней шестая настоящая монета. В этом случае из оставшихся трех монет сравниваем две на весах и таким же образом находим седьмую настоящую монету.

Задача 17.7. Положим на чаши весов по три монеты. Если одна из чаш оказалась тяжелее, то на ней все монеты должны быть настоящими, и мы нашли три настоящих монеты за одно взвешивание.

Если же в результате первого взвешивания весы показали равенство, то на каждой из чаш лежит ровно одна фальшивая монета, а седьмая монета, которая не участвовала во взвешивании, точно настоящая. Осталось за одно взвешивание найти еще две настоящие монеты, выделим их среди трех, лежавших на одной чаше в первом взвешивании. Для этого возьмем две из них и сравним на весах. Если монеты равны, то они обе настоящие. Если же не равны, то настоящими будут более тяжелая монета и та монета из трех выбранных, которая не участвовала во втором взвешивании.

Задача 17.8. Положим на одну чашу весов гири массами 1, 2 и 3 грамма, а на другую — гирию массой 6 грамм. Если одна из чаш перевесила, то ошибка в маркировке точно была допущена. Если же весы находятся в равновесии, то при маркировке могли быть

Задание 17

перепутаны надписи либо на гирях 4 и 5 грамм или на каких-то двух из гирь массами 1, 2, 3 грамм. Теперь положим на одну чашу весов гирьки массами 2 и 4 грамма, а на другую — 1 и 5 грамм. Если весы в равновесии, то все надписи на гирьках верные. Если же равновесия нет, то была допущена ошибка.

В качестве второго взвешивания можно положить на одну чашу весов гирьки 1 и 6 грамм, а на другую — 3 и 5 грамм. Если все надписи верные, то первая чаша должна оказаться легче. Если же где-то была допущена ошибка, то либо гиря в 1 грамм весит на самом деле больше, либо какая-то из гирь массами 3 и 5 грамм весит меньше, либо и то, и другое сразу. В таком случае весы покажут равновесие или вторая чаша будет легче.

Задача 17.9. Пронумеруем монеты в первом столбике числами 1 и 2, во втором — 3 и 4, в третьем — 5 и 6. Настоящую монету будем обозначать буквой Н, фальшивую — Ф, запись 1Н будет означать, что монета 1 настоящая.

Положим на одну чашу весов монеты 1 и 3, а на другую чашу — монеты 2 и 5. Рассмотрим случай, если весы оказались в равновесии. В этом случае перед нами один из следующих вариантов:

1Н, 2Ф, тогда 3Ф, 5Н, 4Н, 6Ф или 1Ф, 2Н, тогда 3Н, 5Ф, 4Ф, 6Н.

Остается сравнить на весах две монеты из одного столбика, например, 1 и 2, чтобы понять, какой из этих вариантов на самом деле перед нами.

Теперь рассмотрим случай, когда в первом взвешивании одна чаша оказалась легче. Пусть это была чаша с монетами 1 и 3, второй случай разбирается аналогично. Итак, в этом случае монета 1 не может быть настоящей и возможен один из трех вариантов:

1Ф, 3Н, 2Н, 5Н, 4Ф, 6Ф или 1Ф, 3Ф, 2Н, 5Ф, 4Н, 6Н или 1Ф, 3Ф, 2Н, 5Н, 4Н, 6Ф.

Сравним теперь монеты 3 и 6. Если монета 3 тяжелее, то перед нами первый из этих вариантов, если легче — то второй, а в случае равенства — третий вариант.

В этой задаче изначально возможны восемь вариантов того, какие именно монеты фальшивые:

1Н, 2Ф, 3Н, 4Ф, 5Н, 6Ф;	1Ф, 2Н, 3Н, 4Ф, 5Н, 6Ф;
1Н, 2Ф, 3Н, 4Ф, 5Ф, 6Н;	1Ф, 2Н, 3Н, 4Ф, 5Ф, 6Н;
1Н, 2Ф, 3Ф, 4Н, 5Н, 6Ф;	1Ф, 2Н, 3Ф, 4Н, 5Н, 6Ф;
1Н, 2Ф, 3Ф, 4Н, 5Ф, 6Н;	1Ф, 2Н, 3Ф, 4Н, 5Ф, 6Н.

Первое взвешивание мы подбирали так, чтобы по его результатам варианты разбились на три примерно одинаковых группы. В случае равновесия у нас оставалось два возможных варианта, если первая чаша была легче, то три варианта, и если вторая чаша легче, то еще три варианта. Для оставшихся двух или трех возможных вариантов мы подбирали второе взвешивание таким образом, чтобы в зависимости от показаний весов (больше, меньше, равно) однозначно определить, какой из вариантов перед нами.

Задача 17.10. Проведем много взвешиваний, в которых бы участвовала гиря массой 10 г. Сравним на весах гири

1, 10 и 11;	2, 10 и 12;	3, 10 и 13;	...	9, 10 и 19;
20, 10 и 30;	21, 10 и 31;	22, 10 и 32;	...	29, 10 и 39;
40, 10 и 50;	41, 10 и 51;	42, 10 и 52;	...	49, 10 и 59;
...
80, 10 и 90;	81, 10 и 91;	82, 10 и 92;	...	89, 10 и 99.

Всего будет проведено 49 взвешиваний. Посмотрим, сколько раз при этом весы находились в равновесии. Если гиря в 10 г бракованная, то весы могут показать равновесие только если на них находится хотя бы еще одна бракованная гиря. Поэтому в равновесии весы могут находиться не более 19 раз. Если же гиря в 10 г настоящая, то не более 20 раз весы будут показывать неравенство, а равновесие — не менее 29 раз.

