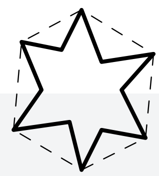
Решения

Задача 21.1. Возможный вариант двенадцатиугольника изображен на рисунке.

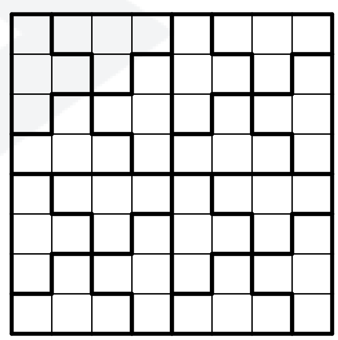


Задача 21.2. **а)** Если мы возьмем кружку первого вида, то к ней можно добавить одно из пяти блюдец — 5 различных пар кружка-блюдце. Если взять кружку второго вида, то к ней также можно добавить пять блюдец — еще 5 различных пар. Поскольку всего 6 видов кружек, то способов выбрать кружку и блюдце $6 \cdot 5 = 30$.

б) Если мы выбрали кружку с блюдцем, то дополнить их какой-либо ложкой можно 4 способами. Поскольку для каждого из 30 различных комплектов кружка-блюдце можно получить 4 различных комплекта кружка-блюдце-ложка, то всего способов выбора кружки, блюдца и ложки будет $30 \cdot 4 = 120$.

в) Мы можем выбрать кружку и блюдце 30 способами, кружку и ложку $6 \cdot 4 = 24$ способами, блюдце и ложку $5 \cdot 4 = 20$ способами. Всего получаем $30 + 24 + 20 = 74$ способа выбрать два предмета с разными наименованиями.

Задача 21.3. Число делится на 18, если оно делится на 2 и на 9. В исходном числе точно необходимо вычеркнуть цифру 9 иначе оно не будет делиться на 2. Сумма оставшихся восьми цифр равна 36. Какую бы еще одну цифру мы не зачеркнули, сумма цифр полученного семизначного числа будет меньше 36 и больше 27, а потому число не будет делиться на 9. Значит, получить делящееся на 18 семизначное число невозможно.



Задача 21.4. **а)** Возможный вариант покрытия доски изображен на рисунке.

б) Всего на доске 100 клеток, поэтому для покрытия доски, если оно возможно, потребуется 25 фигур. Раскрасим клетки доски в шахматном порядке, тогда клеток каждого из цветов окажется ровно 50. Заметим, что при расположении фигуры на доске, она накрывает три клетки одного цвета и одну — другого цвета, т. е. обязательно нечетное количество клеток одного цвета. Предположим, что нам удалось разместить на доске 25 фигур без наложений. В этом случае они бы покрыли нечетное количество клеток одного цвета. Но клеток каждого цвета 50, противоречие. Значит, покрыть всю доску фигурами без наложений нельзя.

Задача 21.5. Рассмотрим граф, вершинами которого являются комнаты замка. Вершины будут соединены ребром, если соответствующие им комнаты граничат друг с другом. Если каждая комната граничит с 1, 3 или 7 другими, то в графе будет 13 вершин нечетной степени. Сумма степеней всех вершин (суммарное количество концов ребер) будет нечетным, что невозможно, поскольку это количество должно быть вдвое больше общего числа ребер, а потому может быть только четным.

Задача 21.6. Если кузнечик вернулся на прежнее место, то суммарная длина всех его прыжков в одну сторону вдоль прямой равна суммарной длине всех его прыжков в другую сторону вдоль прямой. Стало быть, суммарная длина всех прыжков должна быть четной. Суммы чисел от 1 до 13 и от 1 до 14 нечетны (в этих суммах семь нечетных слагаемых). Поэтому через 13 и через 14 прыжков кузнечик не сможет вернуться в исходную точку. А через 15 прыжков может. Для этого, например, прыжки с номерами от 10 до 14 он должен сделать в одну сторону, а остальные — в другую.

Задача 21.7. Р не меньше 1, поэтому С не меньше 2. Чтобы СЕЕМ было как можно меньше, возьмем $С = 2$, тогда $Р = 1$, $О = 9$. В этом случае СЕЕМ не может быть меньше 2003. Несложно показать, что данный вариант возможен, подобрав значения оставшихся букв, например $38+1965=2003$.

Задача 21.8. Можно составить 215 и 43 или 532 и 14.

Задача 21.9. Всего у куба отметили 8 вершин и 6 центров граней. Если двигаться описанным в условии образом, то из вершины можно попасть только в центр грани, а из центра грани — только в вершину. При таком обходе количество пройденных вершин и количество пройденных центров граней будет либо одинаковым, либо отличаться на единицу. Значит, совершить требуемый обход не удастся.

Задача 21.10. Способ разрезать фигуру и сложить квадрат изображен на рисунке.