Решения

Задача 20.1. Заметим, что на вопрос «Вы — рыцарь?» и рыцарь, и лжец должны ответить «да». Значит, второй абориген верно передал ответ первого, поэтому второй абориген является рыцарем. Из его слов следует, что первый абориген лжец.

1	4	3	2	5
2	3	1	5	4
3	5	4	1	2
4	2	5	3	1
5	1	2	4	3

Задача 20.2. Если обозначить цвета цифрами, то можно покрасить клетки изображенным на рисунке способом.

Задача 20.3. Предположим, что из первой коробки во вторую Петя перекладывает белый шарик. (Случай с черным шариком аналогичен.) Тогда из второй в третью он обязательно должен переложить черный шарик, чтобы надпись на второй коробке стала неверной. По этой же причине из третьей в четвертую он должен переложить белый шарик, из четвертой в пятую — черный и так далее. Цвета перекладываемых шариков будут чередоваться, поэтому из 101-й в первую он должен будет переложить белый шарик. Но тогда в первой коробке количество шариков каждого из цветов не изменится, надпись на коробке останется верной. Поэтому переложить шарики требуемым образом Пете не удастся.

Задача 20.4. **а)** Поскольку из А в Б можно добраться пятью способами, и для каждого такого способа есть четыре способа потом доехать до В, то всего способов проехать из А в В через Б будет $4 \cdot 5 = 20$.

б) Аналогичным образом получаем, что способов добраться из А в В через Г будет $3 \cdot 2 = 6$, поэтому всего $20 + 6 = 26$ способов проехать из А в В.

Задача 20.5. Получить 1 возможно, например, так:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 - 6 - 7 + 8 - 9 = 1.$$

Предположим, что удалось расставить знаки таким образом, что значение выражения равно 0. В этом случае сумма всех чисел, перед которыми стоит знак плюс, должна равняться сумме всех чисел, перед которыми стоит минус. Однако сумма всех чисел от 1 до 9 равняется 45, поэтому разбить их на две группы с равными суммами невозможно. Значит, получить ноль нельзя.

Задача 20.6. Раскрасим шарики хулиганов в черный и белый цвета в шахматном порядке. При этом соседи хулигана с белым шариком справа, слева, спереди и сзади (если таковые имеются) должны быть с черными шариками и наоборот. Тогда каждый хозяин белого шарика может проткнуть только черный шарик, а хозяин черного шарика — белый шарик. Но общее количество хулиганов нечетное, а потому хулиганов с шариками какого-то одного цвета, например, белого, будет меньше, чем с шариками другого цвета. В этом случае хотя бы один черный шарик окажется целым.

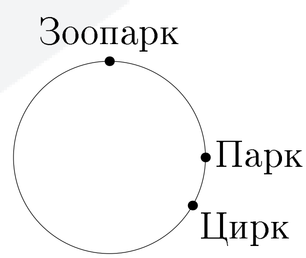
Осталось привести пример, что ровно один шарик мог остаться. Для этого пронумеруем хулиганов так, как показано на рисунке. Разобьем 34 хулигана на пары: 1 и 2, 3 и 4, …, 33 и 34. Пусть хулиганы в парах протыкают шарики друг друга, а хулиган с номером 35 протыкает шарик у хулигана с номером 34. В этом случае целым останется только шарик хулигана с номером 35.

1	2	3	4	5	6	7
14	13	12	11	10	9	8
15	16	17	18	19	20	21
28	27	26	25	24	23	22
29	30	31	32	33	34	35

Задача 20.7. Поскольку среди чисел от 1 до 35 содержится число 9, то произведение этих чисел должно делиться на 9. Сумма известных цифр числа равна 138. Поэтому вместо звездочки должна стоять цифра 6: только в этом случае сумма всех цифр числа, а значит, и само число, будет делится на 9.

Задача 20.8. Если вычесть РА из обеих частей равенства, то получим, что УР + АУ = У00. Поскольку сумма двух двузначных чисел точно меньше 200, то У = 1, и равенство можно переписать в виде 1Р + А1 = 100. Отсюда однозначно восстанавливаются Р = 9, А = 8. Получаем единственное решение ребуса $19 + 98 + 81 = 198$.

Задача 20.9. Поскольку от Цирка до Зоопарка путь через Парк вдвое короче, чем не через Парк, то кратчайший маршрут от Цирка до Зоопарка составляет треть круга, причем на этом маршруте лежит Парк. Поскольку от Парка до Зоопарка путь на трамвае через Цирк втрое длиннее, чем не через Цирк, то кратчайший маршрут от Парка до Зоопарка составляет четверть круга (см. рисунок).



Значит, кратчайший путь от Парка до Цирка составляет $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ круга, а путь от Парка до Цирка через Зоопарк составляет $\frac{11}{12}$ круга. Поэтому путь от Парка до Цирка через Зоопарк в 11 раз длиннее, чем не через Зоопарк.

Задача 20.10. Из двух «уголков» можно сложить «кирпич» $3 \times 2 \times 1$. Из трех таких «кирпичей» можно составить параллелепипед $3 \times 3 \times 2$. Положив сверху на него седьмой «уголок» и шесть отдельных кубиков, получим куб $3 \times 3 \times 3$. Если же отдельные кубики поместить в центры граней большого куба, то внутренний центральный кубик будет граничить только с ними, а потому не сможет оказаться частью никакого «уголка». Поэтому сложить куб в этом случае не получится.