Решения

Задача 22.1. Раскрасим горизонтали доски попеременно в черный и белый цвет так, чтобы самая нижняя горизонталь была черного цвета, а верхняя — белого (раскраска горизонтальной «зеброй»). После каждого хода фишка будет оказываться на поле того же цвета, с которого она ушла. Но изначально на черных полях стоит 6 фишек, а в любой из требуемых позиций на черных клетках должно стоять ровно 3 фишки. Следовательно, передвинуть фишки требуемым образом невозможно. Заметим также, что для решения задачи вместо «зебры» можно было использовать раскраску «в горошек». В одном из пунктов помогает также шахматная раскраска.

Задача 22.2. Раскрасим доску «зеброй», сделав крайние полоски черными. На доске окажется 45 черных и 36 белых клеток. Жуки с черных клеток могут переползти только на белые клетки, а с белых — на черные. Поэтому хотя бы 9 черных клеток окажутся свободными.

Задача 22.3. Мысленно разобьем куб на 27 кубиков $2 \times 2 \times 2$, которые будем называть кирпичиками. Каждый кирпичик покрасим целиком в черный или белый цвет так, чтобы кирпичики одного цвета не соприкасались. (В результате получим раскраску «крупными квадратами» в пространстве.) Поскольку общее количество кирпичиков нечетно, то количество единичных кубиков $1 \times 1 \times 1$ одного и другого цвета будет различным. Но каждый параллелепипед $4 \times 1 \times 1$ содержит поровну белых и черных единичных кубиков, поэтому разбить исходный куб на такие параллелепипеды без остатка не получится. Для решения задачи можно было воспользоваться и раскраской «в горошек» в пространстве: в каждом кирпичике покрасить в черный цвет дальний правый верхний единичный кубик.

Задача 22.4. Запишем числа в таблицу следующим образом:

40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

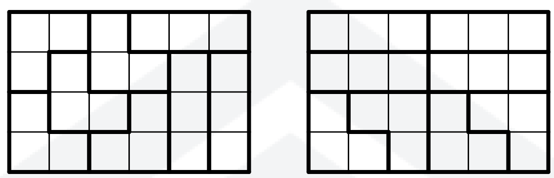
Выбор четырех чисел в соответствии с условием эквивалентен выбору некоторого прямоугольника 1×4 в таблице. Поэтому задачу можно переформулировать следующим образом: можно ли прямоугольник 6×10 разрезать на прямоугольники 1×4. Из разобранного в занятии примера известно, что сделать это невозможно.

Задача 22.5. Если доску удастся разрезать требуемым образом, то получится 15 фигур в форме буквы «Г». Покрасим клетки доски «зеброй». При такой раскраске получится по 30 черных и белых клеток, а каждая фигура в форме буквы «Г» будет содержать нечетное количество клеток черного цвета. Но в 15 фигурах тогда тоже должно быть нечетное количество черных клеток, а у нас их 30, поэтому разрезать всю доску на такие фигурки не получится.

Задача 22.6. Раскрасим вертикали доски в черный и белый цвет «зеброй», в результате получится по 32 клетки каждого цвета. Каждая горизонтальная плитка содержит по одной клетке каждого цвета. Если вырезать из доски 17 горизонтальных плиток 1×2, то останется 15 белых и 15 черных клеток. Но в каждой вертикальной плитке обе клетки одного цвета, поэтому разрезать оставшуюся часть только на вертикальные плитки не удастся.

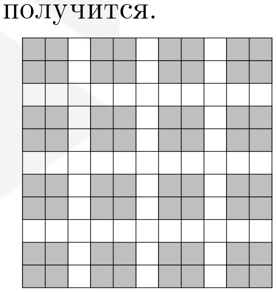
Задача 22.7. **а)** Разделим дно коробки на единичные квадраты и воспользуемся раскраской «в горошек». Когда плитки изначально находились в коробке, каждая плитка 1×4 закрывала четное количество квадратиков (0 или 2), а плитка 2×2 — ровно один квадратик. Поэтому четность количества закрашенных клеток на дне коробки совпадает с четностью количества плиток 2×2. Если одну плитку 2×2 заменить, то четность количества таких плиток изменится, а потому заполнить дно коробки уже не получится.

б) В этом случае утверждение задачи уже не будет верным. Примеры изображены на рисунке.



Задача 22.8. Покрасим клетки прямоугольника, которые стоят на пересечении столбцов и строк с нечетными номерами, в черный цвет. (В результате получим раскраску «в горошек».) Всего получим 12 черных и 23 белых клетки. Предположим, что покрыть клетки уголками требуемым образом удалось, причем каждая клетка оказалась покрыта в n слоев. Поскольку каждый уголок покрывает не более одной черной клетки, то общее количество уголков не менее $12n$. С другой стороны, каждый уголок покрывает не менее двух белых клеток, поэтому количество уголков не более $\frac{23n}{2}$, что меньше $12n$. Приходим к противоречию, покрыть прямоугольник уголками не получится.

Задача 22.9. Раскрасим клетки так, как изображено на рисунке. (Данную раскраску будем называть «в крупный горошек».) Всего получилось 16 черных квадратов 2×2. Любой вырезаемый квадратик 2×2 будет содержать клетки только одного из черных квадратов. Если вырезать 15 квадратов, то один из черных квадратов останется целым. Этот квадрат и можно будет вырезать следующим.



Задача 22.10. Раскрасим куб так, как изображено на рисунке. (На самом деле это опять получилась раскраска «в крупный горошек», но размещенная на поверхности куба.) При таком способе раскраски любая полоска из трех клеток будет накрывать четное количество закрашенных клеток. Но всего закрашено нечетное число клеток. Поэтому оклеить поверхность куба без наложений не получится.