Решения

Задача 18.1. Монеты попеременно лежат кверху то одинаковыми сторонами, то различными. Если в итоге «Хоп!» было произнесено четное количество раз, то монеты лежат одинаковой стороной кверху и накрытая рукой монета лежит таким же образом, как и открытая. Если же «Хоп!» произнесли нечетное число раз, то монеты лежат разными сторонами вверх, накрытая рукой монета лежит противоположной стороной кверху по сравнению с открытой.

Задача 18.2. Если обходить отмеченные точки по отрезкам диагоналей, то в этом обходе вершины и центры граней обязательно будут чередоваться. Если бы было возможно обойти все отмеченные точки, то количество вершин и центров граней должно было быть одинаковым или различаться на один. Но вершин 8, а центров граней только 6, поэтому требуемый обход невозможен.

Задача 18.3. Заметим, что количество дверей в подвале после каждой операции меняется на 1, в подвале попеременно находится то четное, то нечетное число дверей. После того, как проснулись жители последней комнаты, в подвале обязательно будет четное число дверей. Поэтому 5 дверей в подвале в итоге оказаться не могло. Также несложно понять, что 10 дверей в подвале тоже не могло оказаться: для этого необходимо, чтобы у всех просыпающихся дверь была на месте, что невозможно. Поэтому в подвале могло оказаться не более 8 дверей.

Приведем пример, что 8 дверей действительно могло оказаться. Пусть первыми просыпаются жители первой комнаты и уносят дверь десятой комнаты, потом жители второй комнаты уносят дверь первой комнаты, жители третьей — дверь второй комнаты, жители четвертой — дверь третьей, ..., жители девятой — дверь восьмой, а жители десятой возвращают свою дверь обратно.

Задача 18.4. Проведем между любыми двумя соседними числами стрелку от делимого к делителю. (Если числа равны, то соединим их стрелкой любого направления.) Всего будет проведено пятнадцать стрелок, чередоваться направления этих стрелок не могут. Поэтому найдутся две соседние стрелки, направленные в одну сторону. В этом случае из трех чисел, между которыми проведены эти две стрелки, два крайних будут делиться одно на другое, но не будут соседними.

Задача 18.5. Если спортсмен меняется местами с каким-то другим (не важно, кто кого при этом обгоняет), то четность его места меняется. Саша выбежал первым и пять раз менялся с другими участниками, поэтому у него четное место, значит, второе. Боря финишировал раньше Саши, поэтому он первый. А Игорь был третьим.

Задача 18.6. Цвет верхних двух карточек чередуется: они попеременно то обе одного цвета, то разных цветов. После одиннадцатой карточки обе верхних карточки в стопках имеют одинаковый цвет. Поэтому после двадцать пятой выложенной карточки верхние карточки в стопках также будут одного цвета, черные. Значит, двадцать шестой можно выложить только красную карточку.

Задача 18.7. Предположим противное: никакие два представителя одной расы не сидят рядом. В этом случае рядом с каждым человеком или гоблином сидит эльф или гном, а рядом с каждым эльфом или гномом сидит человек или гоблин. Выдадим каждому человеку и гоблину кружку с элем, а каждому эльфу и гному — кубок. Тогда обладатели кружек и кубков должны чередоваться. Но это невозможно, поскольку за столом нечетное количество сидящих. Значит, наше предположение неверно, и какие-то два представителя одной расы сидят за столом рядом.

Задача 18.8. Изначально у семпоальтеков четное количество слитков и жемчужин и нечетное количество бус. Каждый обмен изменяет количество предметов каждого вида на единицу, что приводит к изменению их четности. Значит, у семпоальтеков будет попеременно то четное количество слитков и жемчужин и нечетное количество бус, то нечетное количество слитков и жемчужин и четное количество бус. В результате оказалось нулевое, четное количество двух видов предметов и нечетное, равное единице количество предметов другого вида. Получаем, что остаться могли только бусы.

Задача 18.9. Два жителя в разноцветных очках не могут находиться рядом, поэтому очков с разноцветными стеклами не более 7. Посмотрим, может ли их быть ровно 7. В этом случае где-то рядом стоят два жителя в одноцветных очках, а далее чередуются жители в разноцветных и одноцветных очках. При таком чередовании рядом с жителем в разноцветных очках может стоять житель в одноцветных очках только третьего цвета, а следующий за ним житель будет в разноцветных очках тех же цветов, что и у первого. Поэтому все одноцветные очки у жителей должны быть одинаковы, а тогда стоящие рядом два жителя в одноцветных очках имеют одинаковые стекла. Значит, разноцветных очков у жителей не может быть больше 6.

Теперь приведем пример, что может быть 6 разноцветных очков. Если обозначить цвета стекол по их первым буквам, то у жителей может быть, например, следующая последовательность стекол в очках:

ЗЗ, РГ, ЗЗ, РГ, ЗЗ, РР, ЗГ, РР, ЗГ, РР, ГГ, ЗР, ГГ, ЗР, ГГ.

Задача 18.10. Назовем кузнечиков Петя, Вася и Коля. Будем обозначать последовательность, в которой они сидят на прямой по первым буквам их имен, например, ПВК. В результате каждого прыжка какие-то две соседние буквы в этой последовательности меняются местами. Несложно заметить, что попеременно будут чередоваться то одна из последовательностей ПВК, ВКП, КПВ, то одна из последовательностей ВПК, ПКВ, КВП. Поскольку чередуются две группы последовательностей, то через 111 секунд кузнечики будут сидеть в последовательности, отличающейся от первоначальной, а потому не могут оказаться на исходных местах.