# Решения

**Задача 21.1.** Если составное число не делится ни на одно простое число от 2 до 97, то любой его простой делитель не меньше 101, а само число не меньше $101^2 = 10201$. Полученное число является пятизначным, поэтому любое четырехзначное число, не кратное простым числам от 2 до 97, точно будет простым.

*Обобщив решение данной задачи, можно получить способ проверки числа на простоту. Для этого достаточно разделить число на все простые числа, квадрат которых меньше данного числа. Если ни на одно из них число не делится, то оно простое.*

**Задача 21.2.** Число 1001 раскладывается на простые множители как $7 \cdot 11 \cdot 13$. Посмотрим, сколько раз встретится каждый из этих множителей в разложении числа 1001! на простые множители. Понятно, что в разложении на простые множители чисел 7 и 11 будет не меньше, чем чисел 13, поэтому посчитаем, сколько раз встретится 13. В разложении чисел от 1 до 1001 на простые множители число 13 будет присутствовать у $1001 : 13 = 77$ чисел. При этом у чисел $13^2 = 169, 2 \cdot 13^2, \ldots, 5 \cdot 13^2 = 845$ в разложении на простые множители число 13 будет присутствовать дважды. Поэтому в разложении числа 1001! число 13 встретится $77 + 5 = 82$ раза, что и является искомой степенью.

**Задача 21.3.** Из условия следует, что в разложении числа на простые множители должны присутствовать 2, 3 и 5. Пусть они входят в степенях $a, b, c$ соответственно. Поскольку при делении на 2 получается квадрат, то $a$ нечетно, а $b$ и $c$ четны. Аналогичным образом получаем, что $a$ и $c$ кратны 3, а $b$ при делении на 3 дает остаток 1; $a$ и $b$ кратны 5, а $c$ дает остаток 1 при делении на 5. Отсюда находим наименьшие возможные значения $a, b, c$: $a = 15$, $b = 10$, $c = 6$. Значит, наименьшее искомое число равно $2^{15} \cdot 3^{10} \cdot 5^6$.

**Задача 21.4.** Заметим, что исходное простое число можно представить в виде суммы искомого остатка и некоторого количества чисел 60. $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, поэтому если бы остаток делился на 2, 3 или 5, то и вся сумма должна была бы делиться на это же число, что невозможно. Получаем, что остаток является произведением простых чисел, каждое из которых не меньше 7. Но такое число может быть только $7 \cdot 7$, поскольку следующее возможное произведение $7 \cdot 11$ уже больше 60. Значит, искомый остаток равен 49. (Заметим, что описанная в задаче ситуация возможна, например, для числа 109.)

**Задача 21.5.** В разложении на множители каждого из чисел 20 и 100 количество двоек не меньше, чем количество пятерок. Во всех новых числах, записываемых на доску, это свойство будет сохраняться. А в разложении числа $50\ldots0$ на простые множители двоек будет на одну меньше, чем пятерок. Поэтому получить на доске данное число невозможно.

**Задача 21.6.** Предположим, что такое возможно. В этом случае количество простых множителей в разложении двух соседних чисел должно различаться на единицу. Тогда должны чередоваться числа с четным и нечетным количеством простых множителей в разложении. Однако чередование невозможно, поскольку количество чисел нечетно. Значит, записать числа требуемым образом невозможно.

**Задача 21.7.** Обозначим число, которое было возведено в сотую степень, буквой $M$. Поскольку $M$ делится на каждое из оставшихся чисел, то все простые делители оставшихся 16 чисел содержатся в разложении $M$ на простые множители. В разложении двузначного числа любой простой множитель присутствует не более чем в 6 степени, поскольку наименьшее простое число 2 в седьмой степени уже является числом трехзначным. Поэтому в разложении произведения 16 чисел на простые множители каждый из множителей встречается не более $6 \cdot 16 = 96$ раз. При этом каждый такой множитель присутствует в $M^{100}$, причем не менее 100 раз. Значит, $M^{100}$ делится на произведение остальных чисел на доске.

**Задача 21.8.** У составного двузначного числа один из простых делителей должен быть однозначным, поскольку произведение двух двузначных делителей будет не меньше 100. Всего существуют четыре однозначных простых числа: 2, 3, 5, 7. Следовательно, на доске записано не более четырех чисел. Несложно показать, что четыре числа могут быть записаны. Например, числа 38, 51, 65, 77.

**Задача 21.9.** Решение 1. Выберем десять различных простых чисел. В качестве первого числа возьмем произведение всех выбранных простых чисел, кроме первого, в качестве второго — всех, кроме второго, ..., в качестве десятого — всех, кроме десятого. Понятно, что ни одно из чисел не будет делиться на другое, а произведение любых двух будет делиться на любое из оставшихся.

Решение 2. Несложно проверить, что подходит набор $2^{19}3^{10}, 2^{18}3^{11}, 2^{17}3^{12}, \ldots, 2^{10}3^{19}$.

**Задача 21.10.** Разложим число на множители: $10800 = 2^4 3^3 5^2$. Любой делитель этого числа в разложении на простые множители содержит только числа 2, 3 и 5 в некоторых степенях. Количество двоек может быть от 0 до 4 — 5 вариантов. К каждому из этих вариантов имеется 4 способа добавить некоторое количество троек, приписав от 0 до 3 троек. Поэтому у числа существует всего $5 \cdot 4 = 20$ различных делителей, не содержащих 5. Для получения всех возможных делителей осталось добавить к каждому из уже имеющихся 20 делителей 0, 1 или 2 пятерки. Получим, что всего данное число имеет $20 \cdot 3 = 60$ делителей.

*Несложно обобщить это решение и получить формулу для числа делителей произвольного числа. Пусть разложение числа $M$ на простые множители имеет вид $M = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_k^{n_k}$. Тогда $M$ имеет $(n_1+1)(n_2+1)\ldots(n_k+1)$ делителей.*