Решения

Задача 17.1. Если в коробке один зеленый карандаш, то синих должно быть 6, а остальные 13 — красные. Но это противоречит условию, что красных карандашей меньше, чем синих.

Если в коробке два зеленых карандаша, то синих должно быть 12, а остальные 6 — красные. В этом случае все условия задачи выполнены.

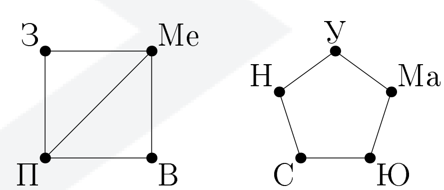
Если же в коробке три зеленых карандаша, то синих должно быть 18, что суммарно уже больше 20, а потому невозможно. Понятно, что и больше трех зеленых карандашей в коробке быть не может.

Получаем, что в коробке 2 зеленых, 12 синих и 6 красных карандашей.

Задача 17.2. Поскольку из каждого города выходит 4 дороги, то въезды в город охраняют 4 стражника. В каждый момент времени на посту во всех городах должно находиться $33 \cdot 4 = 132$ стражника. Каждую дорогу охраняют два стражника, по одному на каждом конце дороги. Поэтому всего дорог $132 : 2 = 66$.

Задача 17.3. Раскрасим клетки доски в шахматном порядке так, чтобы угловые клетки были черного цвета. Тогда на доске получится 25 черных и 24 белых клетки. При шахматной раскраске любая белая клетка соседствует только с черными, а черная — только с белыми. Поэтому жуки с черных клеток обязательно переползли на белые, а с белых — на черные. На белых клетках было 24 жука, они могли занять только 24 черных клетки, поэтому хотя бы одна черная клетка будет пустой.

Задача 17.4. Сделаем схему, на которой точками отметим планеты и подпишем их по первым буквам названий. Планеты, между которыми есть сообщение, соединим отрезками. Из данного рисунка видим, что добраться от Земли до Марса невозможно.



Схема, подобная этой, на которой имеется несколько точек каким-то образом соединенных друг с другом отрезками, в математике называется графом. Точки называются вершинами графа, а отрезки между ними — ребрами графа. Количество ребер, выходящих из этой вершины, называется степенью вершины. Так, в нашем случае вершины, соответствующие Плутону и Меркурию, имеют степень 3, а остальные вершины — степень 2.

Графы используются довольно часто. К задаче 17.2 также можно было бы нарисовать граф, если бы было известно, какой город с каким со-

единен. Из ее решения следует довольно важная идея способа подсчета количества ребер в графе, если известны степени всех вершин:

$$\text{количество ребер} = \frac{\text{сумма степеней всех вершин}}{2}.$$

Действительно, сумма степеней всех вершин — это общее количество всех концов ребер (или количество стражников, несущих службу во всех городах). Ребер же в два раза меньше, чем их концов (или на каждой дороге работают два стражника, поэтому дорог вдвое меньше, чем стражников).

Задача 17.5. Из условия следует, что велосипедист проезжает треть пути между A и B быстрее, чем мотоциклист две трети того же пути. Поэтому оставшиеся две трети пути велосипедист проедет быстрее, чем мотоциклист проедет четыре третьих того же пути до возвращения в пункт A.

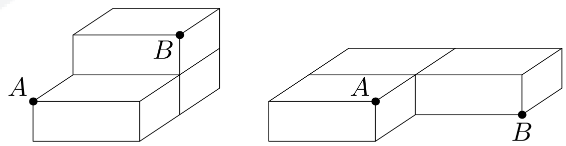
Задача 17.6. Разберем три случая. Предположим, что первое утверждение истинно, а остальные ложны. Тогда верно следующее: у Вовы больше 1000 книг, у него не меньше 1000 книг и у него нет ни одной книги. Все три утверждения одновременно быть верными не могут, поэтому этот случай невозможен.

Теперь предположим, что истинно только второе утверждение. Тогда получаем следующее: у Вовы не больше 1000 книг, у него меньше 1000 книг и у него нет ни одной книги. В этом случае у Вовы может быть только 0 книг.

Теперь рассмотрим третий случай, когда верно только третье утверждение. В этом случае у Вовы не больше 1000 книг, у него не меньше 1000 книг и у него есть хотя бы одна книга. Тогда у Вовы может быть только 1000 книг.

Из разобранных случаев становится понятно, что у Вовы может либо вовсе не быть книг, либо быть ровно 1000 книг.

Задача 17.7. Можно положить кирпичи одним из приведенных на рисунке способов, после чего измерить расстояние между точками A и B.



Задача 17.8. Предположим, что такое возможно. Возьмем 25-угольник и начнем проводить извне многоугольника прямую, которая должна пересечь все его стороны. Когда прямая пересечет первую сторону, то окажется внутри многоугольника, когда пересечет вторую сторону, то окажется снаружи многоугольника, после пересечения с третьей стороной снова ока-

жется внутри и так далее. После пересечения с двадцать пятой стороной прямая окажется внутри многоугольника. Но это невозможно, поскольку после пересечения с последней стороной прямая должна оказаться вне многоугольника.

Можно рассуждать и иначе. Проведем прямую и начнем рисовать 25-угольник так, чтобы прямая пересекла все его стороны. Отметим первую вершину многоугольника, пусть она находится справа от прямой. Тогда соседняя с ней вторая вершина должна лежать слева от прямой, чтобы прямая пересекала соединяющую вершины сторону. Третья вершина снова должна лежать справа от прямой, четвертая — слева, ... Продолжая и дальше такие рассуждения, получим, что 25-я вершина должна лежать справа от прямой. Поскольку первая и 25-я вершины лежат по одну сторону от прямой, то соединяющая их сторона не пересекается с прямой, а потому требуемых прямой и многоугольника не существует.

Задача 17.9. Всего в ребусе присутствует девять букв, каждая по одному разу. Ни одна из букв равняться нулю не может, поскольку в противном случае в одной части равенства получился бы ноль, а в другой — положительное число. Поэтому в правой и левой части по одному разу встречаются все числа от 1 до 9. Далее можно рассуждать по-разному.

Можно заметить, что в одной части равенства будет находиться число 5, и все произведение будет делиться на 5. В другой же части равенства не будет ни одного числа, кратного 5, а потому произведение чисел в этой части не будет кратно 5. Значит, заменить буквы цифрами и получить верное равенство невозможно.

Можно посмотреть, какие значение может принимать произведение в правой и левой частях равенства. Произведение в левой части равенства не может быть больше чем $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$. В правой части равенства произведение будет не менее $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$, поэтому равенство невозможно.

Задача 17.10. Способ разрезать квадрат с дыркой и сложить из него прямоугольник изображен на рисунке.