Решения

Задача 22.1. Из условия следует, что среди Бобика, Робика и Тобика кто-то дрался с одной, кто-то с двумя и кто-то с тремя другими собаками, меньше или больше быть не может. Поскольку конкретные имена этих собак не важны, можно считать, что Бобик дрался с тремя, Робик — с двумя, а Тобик — с одной из собак. Тогда Бобик дрался со всеми остальными, а Тобик — только с Бобиком. Тогда Робик мог драться только с Бобиком и Толстолобиком. Получаем, что Толстолобик дрался с двумя собаками.

Задача 22.2. Пусть после занятия получилось очень много рисунков, среди которых можно найти любой способ раскраски флажка. Разделим эти рисунки на 4 стопки: в первую положим рисунки, на которых самая левая полоска раскрашена красный цвет, во вторую — в синий, в третью — в желтый, в четвертую — в зеленый. Средняя полоска в первой стопке красной быть не может. Поэтому первую стопку можно поделить на три стопки поменьше в зависимости от цвета средней полоски. Таким же образом можно поступить и с оставшимися тремя большими стопками. В результате вместо четырех получим двенадцать стопок. В каждой из этих стопок совпадает цвет первых полосок и совпадает цвет вторых полосок, а цвет третьих полосок различается. Цвет ее не должен совпадать с цветом средней полоски, а потому каждую из двенадцати стопок можно снова разделить на три новых в зависимости от цвета третьей полоски. Всего получим 36 стопок, поэтому могло получиться 36 флажков, раскрашенных различным образом.

Задача 22.3. После любого количества операций число 1 будет находиться на нечетном от начала месте, а потому никогда не сможет оказаться последним. По этой причине переставить числа в обратном порядке не получится.

Задача 22.4. Рассмотрим граф, вершинами которого являются ученики класса. Вершины будут соединены ребром, если соответствующие этим вершинам школьники дружат между собой. В этом случае в графе получится 13 вершин нечетной степени, а потому сумма степеней вершин будет числом нечетным. Но это невозможно, поскольку сумма степеней вершин должна равняться удвоенному числу ребер. Значит, описанная в задаче ситуация невозможна.

Задача 22.5. Произведение чисел от 1 до 100 делится на 9, поскольку содержит 9 в качестве одного из множителей. Поэтому сумма цифр этого произведения делится на 9. Полученное число делится на 9, поэтому и его сумма цифр также будет делиться на 9. Продолжая и далее эти рассуждения, получим, что найденное в итоге однозначное число также делится на 9. Очевидно, оно не может равняться 0, а потому равняется 9.

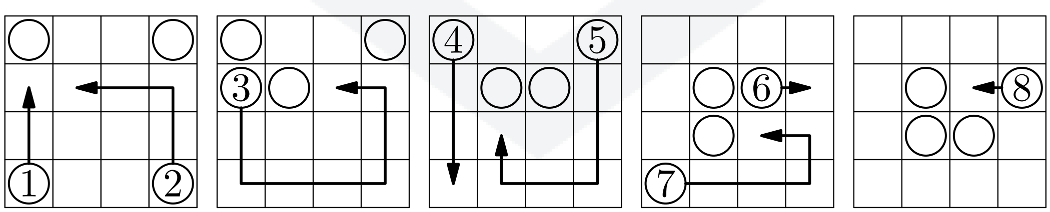
Задача 22.6. И в одну, и в другую сторону автобус едет 5 часов. Разделим весь путь на 5 равных частей, за один час автобус будет проезжать одну такую часть. В момент выезда автобуса из Ярославля, встречный автобус уже проехал одну часть пути. К моменту встречи автобусы проедут еще по две части пути каждый, поэтому встреча произойдет спустя 2 часа, в 14 часов.

Задача 22.7. Чтобы обойти по одному разу все клетки шахматной доски, конь должен сделать 63 хода (на клетку, с которой он начинает, ходить не нужно). Каждым ходом конь меняет цвет клетки, на которой он стоит. После четного числа ходов конь будет на клетке того же цвета, что и исходная, а после нечетного — на клетке противоположного цвета. Однако противоположные угловые клетки на шахматной доске имеют одинаковый цвет, поэтому через 63 хода оказаться в противоположном углу конь не сможет.

Задача 22.8. Число 7 должно стоять в числителе, чтобы значение дроби равнялось 7. Остальные 9 чисел нужно поделить на две группы с одинаковым произведением, состоящие из 4 и 5 чисел, после чего первую группу поместить в числитель, а вторую — в знаменатель. Это можно сделать, например, следующим образом:

$$\frac{7 \cdot 10 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 1}{2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6}.$$

Задача 22.9. Возможный способ перемещения ладей приведен ниже.



Задача 22.10. Число 54 делится на 27, но его сумма цифр не делится на 27. Петя неправ. У числа 9981 сумма цифр делится на 27, а само число не делится на 27. Вася тоже неправ.